

**Физико-математическая Олимпиада РГРТУ  
среди школьников и абитуриентов,  
посвященная 110-летию со дня рождения  
академика И.К. Кикоина**

**1 этап. 22 апреля 2018 года.  
Математика.**

**Задача 1.**

Найдите все числа  $x$ ,  $y$ ,  $z$  удовлетворяющие системе

$$\begin{cases} x^4 + y^4 + z^4 = 3 \\ x^5 + y^5 + z^5 = 3 \\ x^6 + y^6 + z^6 = 3 \end{cases}$$

**Задача 2.**

При каких  $\alpha$  уравнение  $1 + \sin^2 \alpha x = \cos x$  имеет единственное решение?

**Задача 3.**

Решите уравнение  $x^3 - [x] = 4$ , где  $[x]$  – целая часть числа  $x$ .

**Задача 4.**

Натуральные числа  $a$  и  $b$  таковы, что  $a^2 + ab + 1$  делится нацело на  $b^2 + ab + 1$ . Докажите, что  $a = b$ .

**Задача 5.**

Длина стороны  $AB$  параллелограмма  $ABCD$  равна 2,  $\angle BAD = \pi/4$  точки  $E$  и  $F$  расположены на диагонали  $BD$ , причем  $\angle AEB = \angle CFD = \frac{\pi}{2}$ ,  $BF = \frac{3}{2} BE$ .  
Найдите площадь параллелограмма  $ABCD$ .