VII Межрегиональная студенческая физико-математическая Олимпиада имени Г.Н. Шуппе
(II тур Всероссийской студенческой олимпиады)
Рязанский государственный радиотехнический университет
24 марта 2018 года

1. (10 баллов). Пусть для матрицы $A=\left(a_{ij}\right)$, $a_{ij}\in\mathbb{R}$ выполнено $A^2=A^T$. Требуется:

1) Доказать или опровергнуть, что $A^4=A$;
2) найти все различные комплексные $\lambda_i\in\mathbb{C}$ - собственные числа матрицы A;
3) найти максимальный порядок матрицы A такой, что $\lambda_i\neq\lambda_j$ для любых $i\neq j$ и предложить примеры таких матриц.

2. (6 баллов). Пусть $f'\left(x_0\right)\neq 0$, прямые (l) и (n) соответственно касательная и нормальная прямые к $f(x)$ в точке $x=x_0$. Точки A и B - точки пересечения прямых (l) и (n) с осью Ox соответственно, точка C - основание перпендикуляра, опущенного из точки $\left(x_0, f\left(x_0\right)\right)$ на ось Ox. Найти отношение длин отрезков $AC:BC$.

3. (7 баллов). Пусть каждая из трёх переменных P, V, T является дифференцируемой функцией двух других, рассматриваемых как независимые. Найти произведение $\left(\dfrac{\partial P}{\partial T}\right)_V\cdot\left(\dfrac{\partial T}{\partial V}\right)_P\cdot\left(\dfrac{\partial V}{\partial P}\right)_T$.

4. (5 баллов). Доказать, что для прямолинейного движения частицы, необходимо и достаточно, чтобы вектор ускорения был бы коллинеарен вектору скорости в любой момент времени.

5. (6 баллов). Дед Максим решил сделать к празднику спиртосодержащую жидкость. Для этой цели он купил 1000 литров 96% этилового спирта и перегонный аппарат достаточно большого объема, работающий по следующему принципу: каждую минуту в аппарат равномерно вливается 3 литра чистой воды, равномерно перемешивается и равномерно выводится 2 литра спиртосодержащей смеси. Через какое время и в каком объёме он получит в перегонном аппарате 40%-ю спиртосодержащую жидкость?

6. (8 баллов). Пусть $f(x)$ непрерывная на $[0,1]$ и дифференцируемая $(0,1)$ функция. При этом выполнено: $f(0)=4$, $f(1)=2$ и $f'(x)\geq -2$ для любого $x\in(0,1)$. Доказать, что $f(x)$ - линейная функция.

7. (7 баллов). Найдите первые пять членов разложения функции $y=1+xe^y$ по степеням x.

8. (6 баллов). Найти наименьшее значение выражения $\sqrt{x^2+1}+\sqrt{y^2+1}+\sqrt{z^2+1}$ при условиях $x,y,z>0$ и $x+y+z=4$.

9. (4 балла). Известно, что $\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2=3$. Вычислить: а) $x^3+\dfrac{1}{x^3}$; б) x.

10. (9 баллов). Существует ли степень числа 3, которая оканчивается на …001?

11. (8 баллов). Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+2\operatorname{tg}x}-e^x+x^2}{\arcsin x-\sin x}$,

12. (9 баллов). Необходимо выкопать колодец за 4 дня. Колодец имеет форму цилиндра глубиной $H=16$ метров. Распределите работу по извлечению грунта поровну на каждый день. (Каждый день должна выполняться четверть работы).

13. (15 баллов). Какова вероятность того, что при бросании монеты серия из трех орлов подряд выпадет раньше, чем серия из двух решек подряд?