**Студенческая математическая олимпиада РГРТУ
(I тур Всероссийской студенческой олимпиады).
3 марта 2018 года.**

1. На чёрных клетках шахматной доски написаны $\operatorname{ch} x$, а на белых $\operatorname{sh} x$. За один ход можно все функции, стоящие на какой-то горизонтали или на какой вертикали заменить на их производные. Можно ли не более, чем за 2017 ходов получить расстановку, при которой по краям доски написаны $\operatorname{ch} x$, а в остальных клетках $\operatorname{sh} x$?

2. Доказать, что $n! > \left(\frac{n}{e}\right)^n$.

3. Решить систему

$$\begin{cases} x_1 + [x_1] - 5 = x_2 \\ x_2 + [x_2] - 5 = x_3 \\ \dots\dots\dots \\ x_{10} + [x_{10}] - 5 = x_1 \end{cases}.$$

4. Найти интервалы возрастания функции $x^3 + y^3 = xy$.

5. Можно ли расположить в пространстве точки A, B, C, D , так чтобы расстояния между ними были $|AB| = 6$, $|AC| = 6$, $|AD| = 3$, $|BC| = 4$, $|BD| = 7$, $|CD| = 5$?

6. Определить тип кривой $41x^2 + 41y^2 - 18xy - 800 = 0$ и найти координаты фокуса.

7. Пусть число $[x]\{x\} = 100$. Найти $[x^2] - [x]^2$.

8. Решить функциональное уравнение $f(x) = x - f\left(\frac{1}{1-x}\right)$.

9. Существует ли многочлен с целыми коэффициентами, удовлетворяющий условиям: $P(7) = 5$, $P(15) = 9$?

10. Найти все значения параметра x , такие, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{2018}}{n^x - (n-1)^x} = \frac{1}{2017}$.

11. Вычислить интеграл $\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2} dx$.

12. Найти общее решение ДУ $5y + 2y'^2 = x(x + y')$.

13. Разложить в степенной ряд функцию $f(x) = \ln(1 + x + x^2)$.

14. В какой точке плоскости функция

$$z(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{x^2 + y^2 - 4x + 4} + \sqrt{x^2 + y^2 - 10y + 25} + \sqrt{x^2 + y^2 - 8x - 6y + 25}$$

достигает минимума?

**Студенческая математическая олимпиада РГРТУ
(I тур Всероссийской студенческой олимпиады).
3 марта 2018 года.**

1. На чёрных клетках шахматной доски написаны $\operatorname{ch} x$, а на белых $\operatorname{sh} x$. За один ход можно все функции, стоящие на какой-то горизонтали или на какой вертикали заменить на их производные. Можно ли не более, чем за 2017 ходов получить расстановку, при которой по краям доски написаны $\operatorname{ch} x$, а в остальных клетках $\operatorname{sh} x$?

2. Доказать, что $n! > \left(\frac{n}{e}\right)^n$.

3. Решить систему

$$\begin{cases} x_1 + [x_1] - 5 = x_2 \\ x_2 + [x_2] - 5 = x_3 \\ \dots\dots\dots \\ x_{10} + [x_{10}] - 5 = x_1 \end{cases}.$$

4. Найти интервалы возрастания функции $x^3 + y^3 = xy$.

5. Можно ли расположить в пространстве точки A, B, C, D , так чтобы расстояния между ними были $|AB| = 6$, $|AC| = 6$, $|AD| = 3$, $|BC| = 4$, $|BD| = 7$, $|CD| = 5$?

6. Определить тип кривой $41x^2 + 41y^2 - 18xy - 800 = 0$ и найти координаты фокуса.

7. Пусть число $[x]\{x\} = 100$. Найти $[x^2] - [x]^2$.

8. Решить функциональное уравнение $f(x) = x - f\left(\frac{1}{1-x}\right)$.

9. Существует ли многочлен с целыми коэффициентами, удовлетворяющий условиям: $P(7) = 5$, $P(15) = 9$?

10. Найти все значения параметра x , такие, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{2018}}{n^x - (n-1)^x} = \frac{1}{2017}$.

11. Вычислить интеграл $\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2} dx$.

12. Найти общее решение ДУ $5y + 2y'^2 = x(x + y')$.

13. Разложить в степенной ряд функцию $f(x) = \ln(1 + x + x^2)$.

14. В какой точке плоскости функция

$$z(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{x^2 + y^2 - 4x + 4} + \sqrt{x^2 + y^2 - 10y + 25} + \sqrt{x^2 + y^2 - 8x - 6y + 25}$$

достигает минимума?